Μαθημα 1ο 26/2/2018

Κλασσικη Μηχανικη

Στερεα Σωματα

Βασικο χαρακτηριστικο των σωματων ειναι η αταμεια, δηλ αλλαζουν ελαχιστα κατω απο αλλαγες πιεσης, θερμοκρασιας κτλ...
Ενα τελειο σωμα θεωρουμε οτι διατηρει σταθερά το μεγεθος και το σχημα του.

Ορισμος

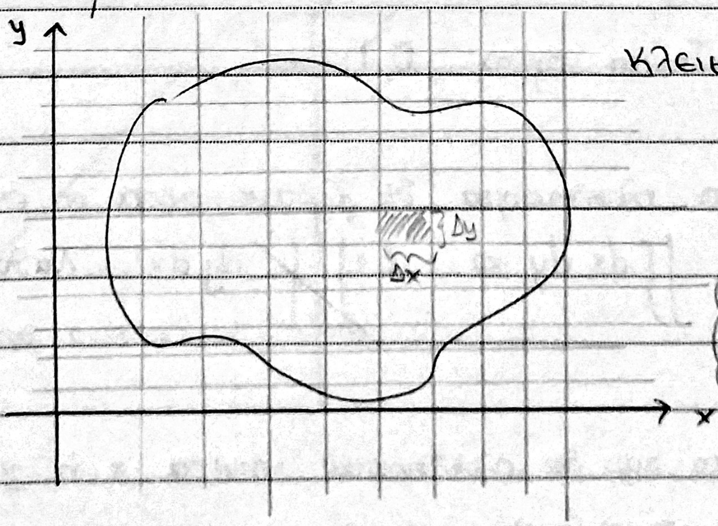
Ενα συστημα σωματιδιων οπου η αποσταση μεταξυ δυο τυχαιων σωματιδιων δεν αλλαζει ασχετα απο τις δυναμεις που δρουν πανω του καλειται στερεο σωμα

• Το πρωτο πραγμα που μελετουμε σ'ενα στερεο σωμα ειναι ο χωρος που καταλαμβανει δηλ το μεγεθος και το σχημα του σε μια διασταση το μηκος, σε δυο διαστασεις το εμβαδον του, σε τρεις διαστασεις το υψος του

Εμβαδον

Εχει σημασια το σχημα αλλα οχι ο τροπος με τον οποιο το αθροιζω

1ος τροπος τεμαχισμου ενος χωρου (υποκλασεις)



Κλειστο και φραγμενο χωριο

μπορω να το "κοψω" οπως θελω σε τριγωνο, ορθογωνια κτλ αρκει να ξερω και το υπολοιπο...

Στοιχειωδες εμβαδον: $\Delta E = \Delta x \cdot \Delta y$

Εμβαδον $E = \iint dA = \iint_A dx\,dy = \iint_A dy\,dx$ {προσοχη δεν αλλαζει dxdy, dydx οταν το ισονω}

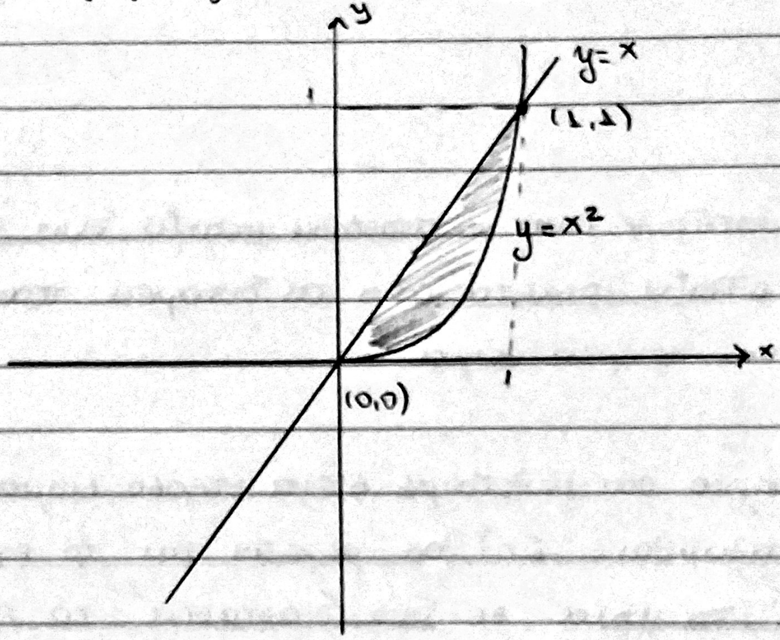
Παραδειγμα

Να βρεθει το εμβαδον του χωρου που περιβαλλεται απο τις καμπυλες

$y = x$ και $y = x^2$ με $x, y > 0$

απαντηση

1º βημα: παντα ζωγραφιζω το χωρο που μου δινει



2º βημα: θα πρεπει να βρω τα σημεια τομης.

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Σημεια τομης } 0, 1$$

προσοχη τωρα για το ολοκληρωμα δε ξεραμε ακρα οτι ειναι το 0, 1

$E = \iint dy\,dx$ ή $\iint dx\,dy \Rightarrow$ $E = \cancel{\int_0^1 \int_0^1} dy\,dx$ Λαθος

↳ θα ειναι μον. τετραγωνο

Εχει μεγαλη σημασια το πως θα ολοκληρωσω πρωτα x ή y

Το πρωτα ακρα συναρτησει του x

Το δευτερα ακρα συναρτησει του y

3ο βημα αφου εχω υποψην ολα τα προηγουμενα θα βρω το εμβαδον

→ σαρωνω μπλε καμπυλη (αριθμοι)

→ σαρωνω ροζ καμπυλη (ατοπο ως προς x)

$$E = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

πρωτα y μετα x
(δεξια → αριστερα)
(ροζ καμπυλη → μπλε)

$$E = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} dx\, dy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dy = \frac{1}{6}$$

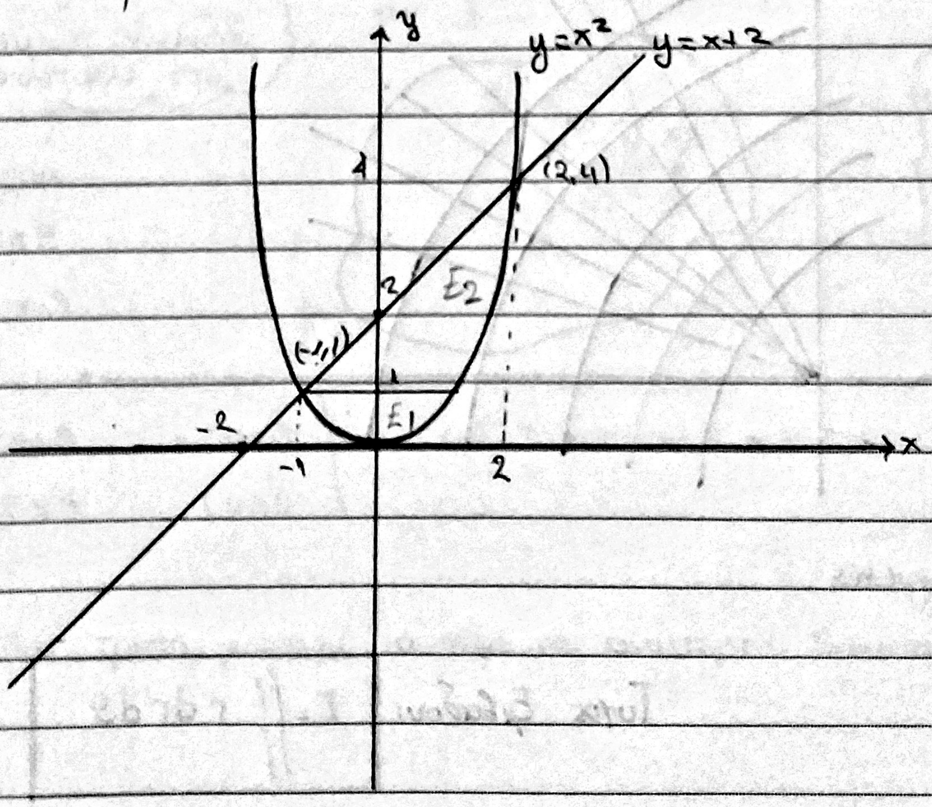
πρωτα x μετα y
(αριστερα → δεξια)
(μπλε καμπ → ροζ)

Παραδειγμα

Να βρεθει το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τις καμπυλες $y = x+2$ και $y = x^2$

απαντηση

Θα σχεδιασουμε το χωριο



$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{σημεια τομης } (-1,1) \text{ και } (2,4)$$

Δε μπορώ να σαρώσω κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά. Κάτω από το (-1,1) έχω πρώτα τη ροζ πάνω έχω πρώτα τη μπλε. Οπότε έχω δύο εμβαδά

$$E = \iint dx\,dy = E_1 + E_2 = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

κάτω προς τα πάνω

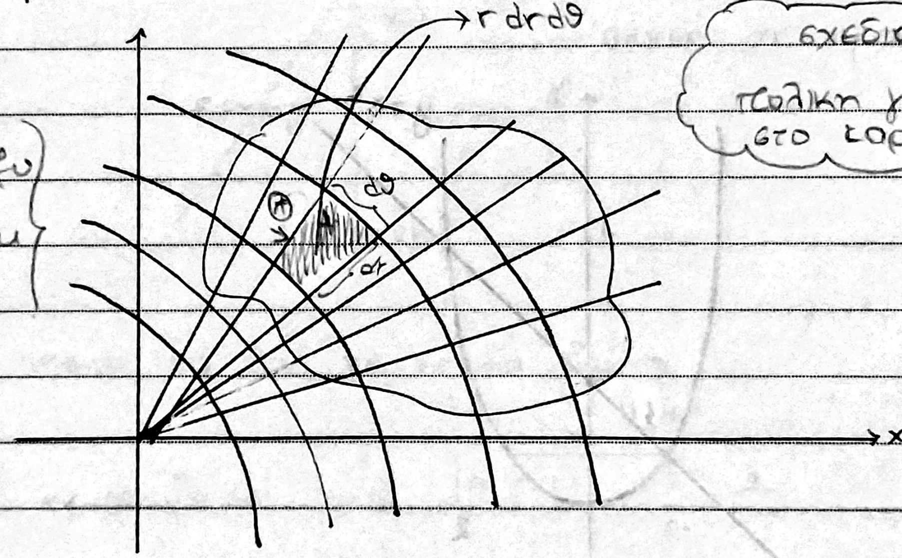
$$\hookrightarrow E = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$$

Εμβαδό - ολοκλήρωμα και ολοκλήρωμα - Εμβαδό

2ος τρόπος τεμαχισμού ενός χωρίου (τα κόβω σε ακτίνες)

σχεδιάζω τη πολική γεωμετρία στο καρτεσιανό επίπεδο

Α Εμβαδό μεταξύ δύο ευθειών και δύο τόξων



Πολικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Τύπος Εμβαδού: $\boxed{E = \iint r\,dr\,d\theta}$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Παρατηρηση

Αλλαγη μεταβλητων σε πολλαπλα ολοκληρωματα γινεται μεσω επι Ιακωβιανής ορίζουσα,

σχολιο:

για δυο διαστασεις

$x = g(u,v)$

$y = f(u,v)$

Ισχυει $$\iint_R h(x,y)\, \underbrace{dx\,dy}_{\text{ή } dy\,dx} = \iint_{\tilde{R}} h[g(u,v), f(u,v)]\, |J(u,v)|\, \underbrace{du\,dv}_{\text{ή } dv\,du}$$

με $$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

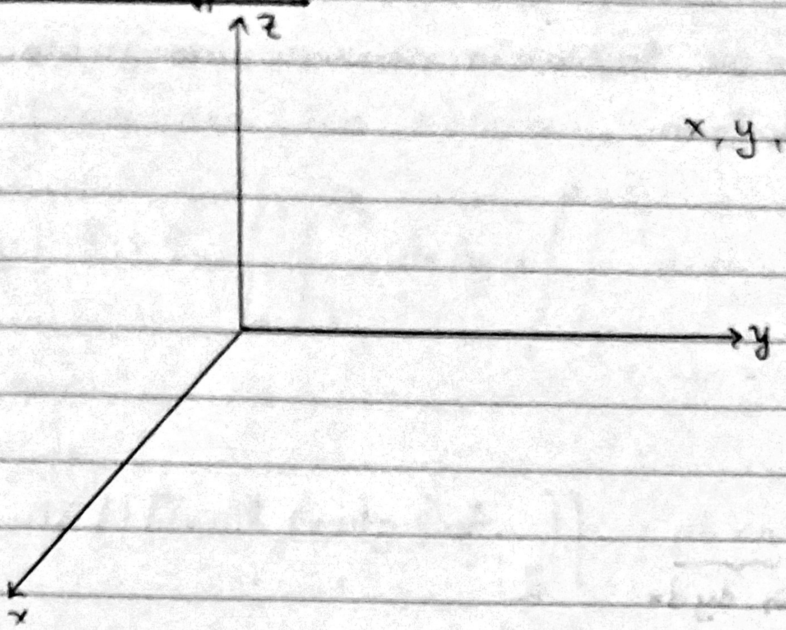
Παραδειγμα

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Με τον ίδιο τροπο μπορουμε να παμε σε ανωτερες διαστασεις

Καρτεσιανές συντεταγμένες



x, y, z

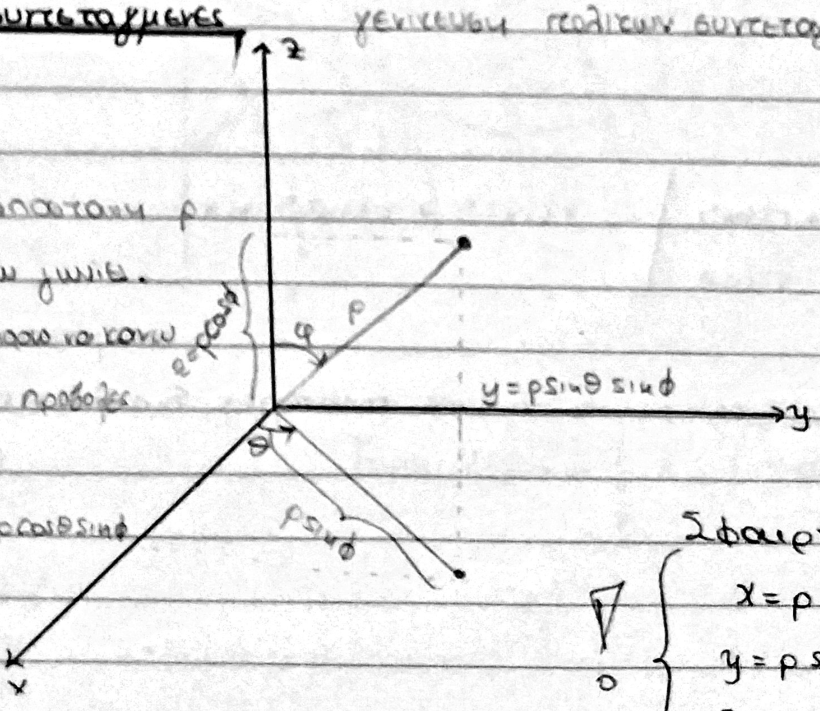
Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \quad (\text{ταυτότητα}) \end{cases}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

γενίκευση πολικών συντεταγμένων

Θέλω στην απόσταση ρ να αντιστοιχίσω γωνίες.
Το μόνο που μπορώ να κάνω είναι να πάρω προβολές.



Σφαιρικές συντ.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$